Couplage entre la MEF et la DGM avec ondes planes pour l'acoustique

O. DAZEL[a], M. GABORIT[a] , G. GABARD[b]

a. LAUM UMR CNRS 6613 Université du Maine, Le Mans olivier.dazel@univ-lemans.fr
b. Institute of Sound and Vibration Research, University of Southampton, UK
...

Résumé :

L'objectif de ce travail est de coupler pour des problèmes acoustiques simples la Méthode des Eléments Finis (MEF) et la Discontinuous Galerkin Method (DGM) avec ondes planes.
Le travail consiste principalement à réécrire les opérateurs de surface de la MEF en les décomposant sur les caractéristiques entrantes et sortantes de l'interface. Cela est effectué à l'aide des techniques classique en DGM de décomposition des flux et qui doivent dans le cas présent être discrétisés à l'aide des fonctions de forme du problème éléments-finis.
Il sera montré que cela entrainera, en raison de la dérivation des fonctions de forme, la perte d'un ordre convergence si une interpolation de Lagrange est utilisées et par une conservation de l'ordre de convergence pour une interpolation de type Hermite.
Plusieurs problèmes acoustiques simples académiques avec et sans matériaux poreux seront présentés.

Abstract :

The objective of this work is to couple for vibro-acoustic problems the Finite Element Method (FEM) with the Discontinuous Galerkin Method (DGM) with plane waves.
The key point is to rewrite surface operators of the FEM by splitting them on the incoming and outgoing characteristics. In addition, it is necessary to derive the FEM shape functions so as to write the first order differential terms in the numerical flux.
It will be show that a consequence is a decrease of the convergence rate of 1 for Lagrange interpolation and conservation of the convergence rate for Hermite interpolation.
Several acoustic problems will be presented with and without porous materials.

Mots clefs : FEM, DGM with plane waves

1 Introduction

On s'intéresse dans ce travail au couplage de deux méthodes numériques : la Discontinuous Galerkin Method (DGM) avec des ondes planes et la Méthode des Eléments Finis (FEM). Dans ce résumé étendu, on ne s'intéresse qu'au problème simplifié de couplage entre deux domaines acoustiques 2D de même propriétés physiques.

Le système linéaire final sera sous la forme :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{A}_{FEM}] & [\mathbf{C}] \\ [\mathbf{C}'] & [\mathbf{A}_{DGM}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_{FEM} \\ \mathbf{X}_{DGM} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{FEM} \\ \mathbf{F}_{DGM} \end{Bmatrix}. \tag{1}$$

L'objectif de ce travail est de proposer une méthode pour obtenir matrices $[\mathbf{C}]$ et $[\mathbf{C}']$. Elles sont associés aux intégrales de surface des formulations faibles. Si Γ représente l'interface entre les deux milieux, ces intégrales s'écrivent :

$$I_{FEM} = \int_\Gamma q \frac{1}{\rho\omega^2} \frac{\partial p}{\partial n} \, \mathrm{d}\Gamma \tag{2}$$

$$I_{DGM} = \int_\Gamma \mathbf{v}^T [\mathbf{F}] \mathbf{u} \, \mathrm{d}\Gamma \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

p représente le champs de pression qui va être discrétisé par élément-finis et q est le champs test associé. $\mathbf{u}$ est le vecteur inconnu de la DGM et $\mathbf{v}$ son champs test associé. $\mathbf{u}$ regroupe les champs de déplacement et de pression :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ p \end{bmatrix} \tag{5}$$

Plus de détails peuvent être trouvés dans [1] pour la MEF et dans [2] et [3] pour la DGM.

2 Decomposition des opérateurs de surface sur les caractéristiques

L'idée principale de la DGM consiste à décomposer les conditions aux interfaces sur la base des caractéristiques entrantes et sortantes. Soit $\mathbf{n} = \{n_x, n_y\}$ la normale à l'interface sortant du domaine DGM. On va en un premier temps et de manière formelle considérer le vecteur $\mathbf{u}_*$ dans les deux domaines (*, représente le domaine). Les conditions de continuité s'écrivent :

$$[\mathbf{C}_{DGM}]\mathbf{u}_{DGM} = [\mathbf{C}_{FEM}]\mathbf{u}_{FEM} \,,\; [\mathbf{C}_{DGM}] = \mathbf{C}_{FEM}] = \begin{bmatrix} n_x & n_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

On peut ainsi voir que ces deux relations ne sont rien d'autre que l'imposition de la continuité de la vitesse normale et de la pression.
On peut montrer que la matrice $[\mathbf{F}]$ de l'opérateur de surface DGM peut se décomposer en deux parties l'une associée à la caractéristique entrante et l'autre associée à la caractéristique sortante :

$$[\mathbf{F}] = c_0 \mathbf{W}^+ \mathbf{\Omega}^+ - c_0 \mathbf{W}^- \mathbf{\Omega}^- \tag{7}$$

avec c_0 la célerité des ondes dans le milieu fluide. Ainsi, on peut décomposer le vecteur **u** dans les deux domaines :

$$\mathbf{u}_{FEM} = \mathbf{W}^{+}\mathbf{u}^{+}_{FEM} + \mathbf{W}^{-}\mathbf{u}^{-}_{FEM} \tag{8}$$

$$\mathbf{u}_{DGM} = \mathbf{W}^{+}\mathbf{u}^{+}_{DGM} + \mathbf{W}^{-}\mathbf{u}^{-}_{DGM} \tag{9}$$

avec

$$\mathbf{u}^{+}_{*} = \boldsymbol{\Omega}^{+}\mathbf{u}_{*}\,,\ \mathbf{u}^{-}_{*} = \boldsymbol{\Omega}^{-}\mathbf{u}_{*} \tag{10}$$

En utilisant les conditions aux limites (6), il est alors possible d'obtenir la matrice des relations entre les caractéristiques entrantes et sortantes du domaine :

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}^{+}_{DGM} \\ \mathbf{u}^{-}_{FEM} \end{array} \right\} = [\mathbf{M}] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}^{-}_{DGM} \\ \mathbf{u}^{+}_{FEM} \end{array} \right\} \tag{11}$$

Connaissant les caractéristiques sortantes en fonction des caractéristiques entrantes, il est possible d'exprimer les vecteurs **u** des deux domaines en fonction des seules caractéristiques entrantes :

$$\mathbf{u}_{FEM} = \mathbf{H}^{+}_{FEM}\mathbf{u}^{+}_{DGM} + \mathbf{H}^{-}_{FEM}\mathbf{u}^{-}_{FEM} \tag{12}$$

$$\mathbf{u}_{DGM} = \mathbf{H}^{+}_{DGM}\mathbf{u}^{+}_{DGM} + \mathbf{H}^{-}_{DGM}\mathbf{u}^{-}_{FEM} \tag{13}$$

L'avantage de cette dernière expression est que les conditions de continuité sont naturellement imposées. Il suffit ensuite d'exprimer les caractéristiques entrantes à l'aide des champs pour obtenir

$$\mathbf{u}_{FEM} = \mathbf{H}^{+}_{FEM}\boldsymbol{\Omega}^{-}\mathbf{u}_{DGM} + \mathbf{H}^{-}_{FEM}\boldsymbol{\Omega}^{-}\mathbf{u}_{FEM} \tag{14}$$

$$\mathbf{u}_{DGM} = \mathbf{H}^{+}_{DGM}\boldsymbol{\Omega}^{-}\mathbf{u}_{DGM} + \mathbf{H}^{-}_{DGM}\boldsymbol{\Omega}^{-}\mathbf{u}_{FEM} \tag{15}$$

On reporte alors ces conditions dans les intégrales de surface.

Le point majeur va consister à discrétiser le vecteur $\mathbf{u}_{FEM}$. En effet, si on considère une approximation de la forme

$$p(x,y) = [\boldsymbol{\Phi}(x,y)]\mathbf{p}, \tag{16}$$

alors le vecteur $\mathbf{u}_{FEM}$ s'écrit de la façon suivante :

$$\mathbf{u}_{FEM} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{j\omega\rho}\dfrac{\partial[\boldsymbol{\Phi}(x,y)]}{\partial x} \\ -\dfrac{1}{j\omega\rho}\dfrac{\partial[\boldsymbol{\Phi}(x,y)]}{\partial y} \\ [\boldsymbol{\Phi}(x,y)]\mathbf{p} \end{bmatrix} \tag{17}$$

Il apparait alors nécessaire de déviver les fonctions de forme. Cela entrainera la perte d'un ordre convergence si une interpolation de Lagrange est utilisées et par une conservation de l'ordre de convergence pour une interpolation de type Hermite.

Références

[1] O.C. Zienkiewicz and R.C. Taylor. , *The finite element method*, 4th. Edition, Vol. **I**, McGraw Hill, 1989., Vol. **II**, 1991.

[2] G. Gabard , *Discontinuous Galerkin methods with plane waves for time-harmonic problems*, *Journal of Computational Physics.*, Vol. **225**, 1961–1984, 2007.

[3] G. Gabard and O. Dazel *A Discontinuous Galerkin Method with Plane Waves for Sound Absorbing Materials*, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, In press, 2015.